Deuxième loi de Newton

Durée de chute

Une petite bille est lâchée sans vitesse initiale d'une terrasse surélevée de 3,2m au-dessus du sol. On néglige les frottements s'exerçant sur cette bille au cours de son mouvement.

(a) Quelle sera la nature du mouvement ?
En choisissant un axe vertical orienté vers le bas et dont l'origine est la position de départ de la bille, indiquer :

(b) Les coordonnées des forces auxquelles la bille est soumise

(c) L'équation horaire du mouvement de la bille

(d) En déduire la durée de chute de la bille, ainsi que sa vitesse au sol.

Solution: (a) Rectiligne accéléré.
(b) $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$.
(c) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
(d) La bille est au sol lorsque $y = 3,2\text{m}$

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$2y = g \cdot t^2$$

$$\frac{2y}{g} = t^2$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2y}{g}}}$$

Expérience de Millikan

Pour déterminer la valeur de la charge élémentaire de l'électron au début du XX^{e}siècle, L'américain Robert A Millikan a mesuré le champ électrique nécessaire pour maintenir en équilibre une gouttelette d'huile portant une charge $q = -e$ négative. Il a trouvé $E = 2,05.10^5\text{N.C}^{-1}$

(a) Faire le bilan des forces qui agissent sur la gouttelette.

(b) Que signifie « pour maintenir en équilibre une gouttelette d'huile » ?

(c) Calculer le poids qui s'exerce sur la gouttelette.

(d) Calculer alors la valeur de la charge élémentaire e.
Données : $r = 1,0\mu\text{m}$; $\rho_{huile} = 800\text{kg.m}^{-3}$

Solution: (a) Force électrique $\vec{F_e} = q.\vec{E}$; poids de la gouttelette $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
(b) Dans ce cas, la gouttelette d'huile ne bouge plus, elle est en suspension dans le champ E. Autrement dit, le poids de la gouttelette et la force électrique se compensent exactement.
(c) On calcule la masse de la gouttelette, comme étant le produit du volume de la gouttelette par sa masse volumique :

$$m = V \cdot \rho_{huile}$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{huile}$$

On peut alors calculer la norme poids :

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$P \approx 3,3\text{N}$$

(d) Comme la goutte est en équilibre : $\vec{F_e} = -\vec{P}$

$$F_e = -\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$q \cdot E = -\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$q = -\frac{4}{3E}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$-e = -\frac{4}{3E}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$e = \frac{4}{3E}\pi r^3 \cdot \rho_{huile} \cdot g$$

$$\boxed{e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}}$$

Lancer de balle vers le haut

Un jongleur lance une balle verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale $v_i = 10\text{m.s}^{-1}$. Déterminer :

(a) La date t_s ; date où le sommet du trajet est atteint.
(b) La hauteur maximale atteinte par la balle
(c) La date du retour de la balle à la position initiale
(d) La vitesse à cet instant.

Solution: **Système étudié** : La balle, assimilée à un point matériel.
Référentiel : Référentiel supposé galiléen du laboratoire, dont l'origine est placée à la main du jongleur. On prendra l'axe vertical l'axe (O ;y).
Bilan des forces : Le poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. On négligera tout frottement sans autres précisions de l'énoncé.
Seconde loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

ou

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

Application

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

Lors de l'ascension, le vecteur accélération est dirigé vers le haut, tandis que le vecteur $\vec{g}$ est dirigé vers le bas. Un signe $-$ apparaît dans l'équation.

$$-m \cdot g = m \cdot a$$

$$-m \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$-g = \frac{dv}{dt}$$

$$v = -g \cdot t + C$$

avec C une constante.
À l'instant initial ($t = 0$), $v_i = 10\mathrm{ms}^{-1}$.

$$v_{(t=0)} = -g \times 0 + C = 10$$

$$C = 10\mathrm{ms}^{-1}$$

$$v = -g \cdot t + 10$$

$$\frac{dy}{dt} = -g \cdot t + 10$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + 10t + D$$

avec D une constante. À l'instant initial ($t = 0$), la balle est dans la main du jongleur, à l'origine du repère. Alors, $D = 0$ et

$$y = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + 10t$$

(a) La hauteur maximale de la balle est atteinte lorsque la vitesse s'annule. Or, $v = -g \cdot t + 10$. Alors $v = 0\text{ms}^{-1}$ à $t_s = 10/g$ soit $t_s \approx 1\text{s}$
(b) On calcule la hauteur maximale atteinte par la balle grâce à t_s calculé précédemment, et à l'expression :

$$y_{max} = -\frac{1}{2}g \cdot t_{max}^2 + 10t_{max}$$

$$y_{max} = -\frac{1}{2}g \times 1^2 + 10 \times 1$$

$$y_{max} \approx 5\text{m}$$

(c) La balle met 1s pour arriver à la hauteur maximale. La balle est revenue à sa position initiale lorsque $y = 0$. Il faut donc résoudre l'équation suivante :

$$y = 0$$

soit

$$-\frac{1}{2}g \cdot t^2 + 10t = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à résoudre.
La première solution $t = 0$ évidente, correspond à l'instant initial, ce qui ne nous intéresse pas ici.
La deuxième solution correspond à la valeur cherchée, soit $t \approx 2$.
La balle met donc $\boxed{t \approx 2\text{s}}$ pour revenir à sa position initiale après avoir été lancée.

(d) On cherche la vitesse de la balle lorsqu'elle est revenue dans la main du jongleur, soit à $t = 2\text{s}$.
On va utiliser l'expression de la vitesse trouvée précédemment, puis remplacer le temps t par 2.

$$v = -g \cdot t + 10$$

Cette vitesse correspond à la vitesse de déplacement selon l'axe (O, y). Pour éviter toute confusion, on notera :

$$v_y = -g \cdot t + 10$$

$$v_y = -9,81 \times 2 + 10$$

$$v_y = -10$$

On prend maintenant la norme :

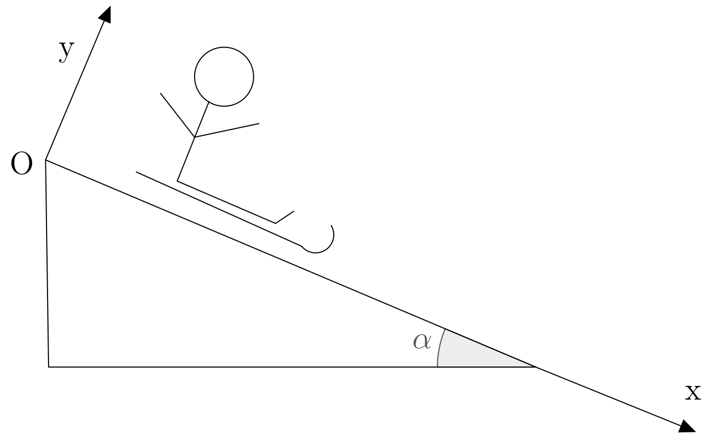
$$v = |v_y|$$

$$\boxed{v = 10\text{m.s}^{-1}}$$

La luge

On considère le système {enfant + luge} assimilé à un point matériel, de masse m, dévalant une piste faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige tout frottement avec l'air et la piste.

On donne $v_{in} = 2\text{m.s}^{-1}$



(a) Dans quel référentiel le mouvement est étudié ?

(b) À partir du graphique ci-dessous, retrouver la valeur de l'accélération a.

Que est le sens et la direction du vecteur $\vec{a}$?

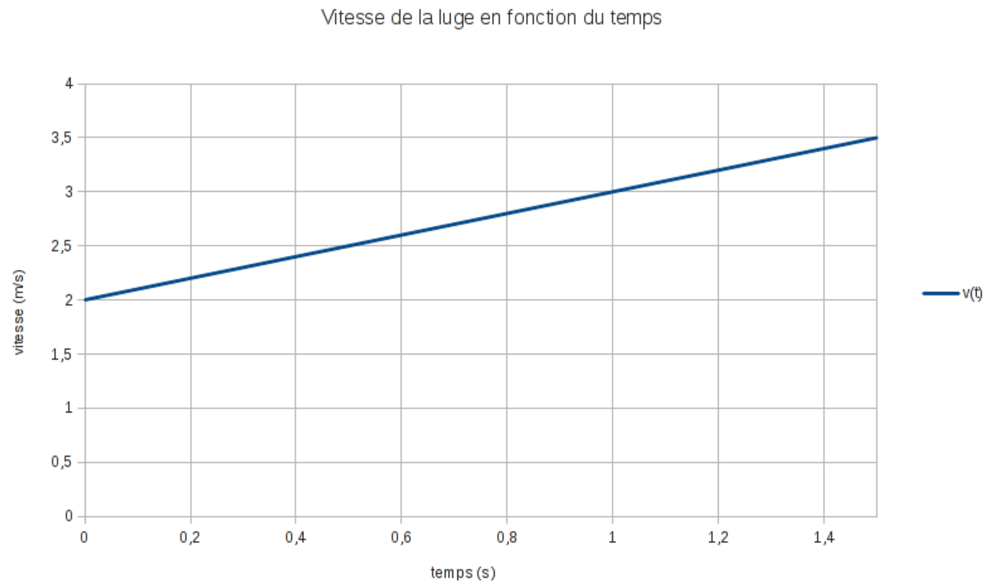
(c) Quelles sont les forces s'appliquant sur le système.

(d) Représenter ces forces sur un schéma.

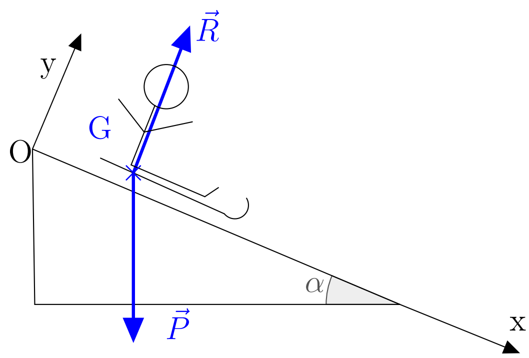
(e) Etablir la relation vectorielle reliant ces forces avec l'accélération.

(f) Ecrire cette relation dans le repère (0 ;x ;y)

(g) En déduire la valeur de l'angle α



Solution: (a) L'étude se déroule dans le référentiel du plan incliné.
(b) $a = 1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
(c) Le poids du système {enfant + luge} $\vec{P}$; la réaction du sol $\vec{R}$.
(d) $\vec{P}$ est vertical vers le bas. $\vec{R}$ est perpendiculaire au plan incliné. Les deux forces s'appliquent au point matériel correspondant au centre de masse enfant+luge appelé G.



(e)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{cases} R - P\cos\alpha = a_y \\ P\sin\alpha = a_x \end{cases}$$

Or il n'y a pas de variation de vitesse selon l'axe $(O;y)$, donc $a_y = 0\text{m.s}^{-2}$

$$\begin{cases} a_y = 0 \\ m \cdot a_x = P\sin\alpha \end{cases}$$

(f) On connaît la valeur de l'accélération, déterminée au (b) : $a_x = 1\text{m.s}^{-2}$

$$a_x = \frac{P}{m}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{m \cdot a_x}{P}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{m \cdot a_x}{P}$$

or $P = m \cdot g$

$$\alpha = \arcsin\frac{a_x}{g}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{9,81}$$

$$\boxed{\alpha \approx 5,8\,^\circ}$$

Cet exercice est proposé à deux niveaux de difficulté.
Dans un premier temps, essayez de résoudre l'exercice de niveau 2.
En cas de difficultés, passer au niveau 1.

La nuit tombée, Roméo se tient à une distance d de la maison de Juliette. Il lance un caillou de masse m vers sa fenêtre de hauteur l et qui est située à la hauteur H du sol.

La pierre quitte la main de Roméo avec une vitesse initiale, de valeur v, faisant un angle α par rapport à l'horizontale. À cet instant, elle se trouve à $h = 2,0$m du sol.

L'origine du repère d'espace est prise au sol, à l'endroit où se trouve Roméo. L'axe vertical est orienté vers le haut. Le référentiel est supposé galiléen.

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme et vaut $9,81\text{m.s}^{-2}$

Données : $d = 2,0$m ; $l = 1,0$m ; $H = 4,5$m ; $\alpha = 60\,^\circ$

Niveau 2 (énoncé compact)

La valeur de la vitesse initiale est $v_i = 10\text{m.s}^{-1}$. Dans l'hypothèse où la pierre est en chute libre, atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?

Niveau 1 (énoncé complet)

(a) Schématiser la situation

(b) Dans l'hypothèse où la pierre est en chute libre, déterminer son vecteur accélération dans un référentiel terrestre en appliquant la deuxième loi de Newton.

(c) Montrer que les équations horaires du mouvement de la pierre sont :
$$\begin{cases} x(t) = v_i.\cos\alpha.t \\ y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_i\sin\alpha.t + h \end{cases}$$

(d) En déduire l'équation de la trajectoire de la pierre.

(e) Roméo lance la pierre avec une vitesse initiale de valeur v_i, égale à 10m.s^{-1}. La pierre atteindra-t-elle la fenêtre de Juliette ?

Solution: **Référentiel** : Référentiel galiléen $(O; x; y)$

Bilan des forces : Le poids de la pierre.
Seconde loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le vecteur $\vec{g}$ est orienté vers le bas, dans le sens inverse à l'orientation de l'axe $(O;y)$, *un signe* $-$ *apparaît.*

$$\boxed{a \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}}$$

Par intégration (inverse de la dérivée), on cherche désormais la vitesse.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

$$v \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g \cdot t + C_2 \end{cases} \quad \text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ des constantes}$$

Pour déterminer les constantes, on se situe aux conditions limites. Ici, on sait qu'à l'instant initial $(t = 0)$,

$$v_{(t=0)} \begin{cases} v_{x\ (t=0)} = v_0 \cos \alpha \\ v_{y\ (t=0)} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Il vient alors que $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$
La vitesse vaut donc :

$$\boxed{v \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

Cherchons maintenant l'équation horaire de la trajectoire de la pierre. On sait que : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y$ En appliquant l'inverse de la dérivée, on trouve :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_3 \\ y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + C_4 \end{cases}$$

avec C_3 et C_4 des constantes à déterminer à partir des conditions initiales connues.
À $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$. Finalement :

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + h \end{cases}}$$

Equation de la trajectoire : $y = f(x)$
L'équation de la trajectoire, aussi appelée *équation paramétrique* est celle reliant les variables y et x entre elles.
Dans les expressions trouvées précédemment, la variable commune à x et y est t. On commence donc par exprimer t en fonction de x :

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

On injecte t dans y :

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot (\frac{x}{v_0 \cos\alpha})^2 + v_0 \sin\alpha (\frac{x}{v_0 \cos\alpha}) + h$$

Comme $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} g \cdot (\frac{x}{v_0 \cos\alpha})^2 + \tan\alpha \cdot x + h}$$

Lorsque $x = d = 2,0\text{m}$, on trouve $\boxed{y = 4,7\text{m}}$.
Or, la fenêtre se trouve à une hauteur de $H = 4,5\text{m}$ et elle a une hauteur $l = 1,0\text{m}$. Roméo doit donc lancer la pierre à une hauteur comprise entre $4,5\text{m}$ et $5,5\text{m}$. La pierre atteint donc la fenêtre.